ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR

L'AVANCEMENT DES SCIENCES

Fusionnée avec

L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE

(Fondée par Le Verrier en 1864)

Reconnue d'utilité publique.

CONGRÈS DE PARIS

1889

M. Gaston TARRY

Contrôleur des Contributions diverses, à Alger.

PARIS

AU SECRÉTARIAT DE L'ASSOCIATION

A l'Hôtel des Sociétés savantes

28, RUE SERPENTE, 28

ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES
Fusionnée avec
L'ASSOCIATION SCIENTIFIQUE DE FRANCE
(Fondée par Le Verrier en 1864)

CONGRÈS DE PARIS — 1889

M. Gaston TARRY
Contrôleur des Contributions diverses, à Alger.

GÉOMÉTRIE GÉNÉRALE

— Séance du 9 août 1889 —

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

1. — La Géométrie ordinaire a pour objet l'étude des propriétés des figures visibles.

La découverte de Descartes, en permettant d'appliquer toute la généralité de l'Algèbre à l'étude des propriétés des figures géométriques, a introduit des conceptions nouvelles, inconnues à la Géométrie ancienne; de là l'apparition, dans les problèmes, de solutions réputées impossibles ou imaginaires.

Nous nous sommes proposé de donner à la Géométrie pure toute la généralité de l'Algèbre, en cherchant à constituer une Science qui permette de représenter, à l'aide de symboles visibles, tous les éléments invisibles d'une figure géométrique, afin d'étendre aux figures invisibles, dites imaginaires, les propriétés des figures visibles ou réelles.

Nous donnons à cette science le nom de *Géométrie générale.*

La Géométrie générale fournit à la Géométrie pure les figures qui lui manquent, et permet de compléter le système de coordonnées de Descartes par l'interprétation rationnelle des solutions imaginaires de l'équation cartésienne.

La Géométrie générale applique la même méthode aux figures réelles ou imaginaires, indistinctement, et ne considère le réel que comme un cas très particulier de l'imaginaire.

LE POINT

2. — En Géométrie générale, nous appelons *point* un nouvel être géométrique formé de deux points ordinaires, considérés dans un ordre déterminé, auxquels nous donnerons le nom de composantes.

Nous distinguerons ces deux composantes, dans le langage, en les appelant *composante origine* et *composante terme*, et, sur la figure, en marquant de l'indice i la lettre indicatrice de la composante terme.

Le point déterminé par la composante origine A et la composante terme B_i sera désigné par le symbole AB_i.

Nous appellerons *support* du point AB_i la droite ordinaire qui passe par les composantes A et B_i de ce point.

Cette représentation géométrique du point est la seule que j'ai pu utiliser pour démontrer simplement les propriétés des figures imaginaires de l'espace.

3. — Cependant, quand on ne sort pas du plan réel, on peut concevoir un autre mode de représentation du point, se rattachant au précédent, qui permet de démontrer plus facilement les premiers théorèmes de géométrie générale.

Considérons, dans le plan réel, le point AB_i, et faisons tourner, dans ce plan, la droite ordinaire AB_i, autour du point ordinaire A, d'un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$; le point ordinaire B_i viendra occuper la position A′, que nous appellerons *composante isotrope positive* du point AB_i.

En faisant tourner la droite AB_i d'un angle égal à $-\frac{\pi}{2}$ autour de A, nous obtiendrons un autre point A″ qui sera la *composante isotrope négative*.

On voit immédiatement que la connaissance des composantes isotropes A′ et A″ détermine sans ambiguïté les composantes origine et terme A et B_i, et, par suite, le point AB_i.

Par conséquent, dans le plan réel, nous pouvons encore représenter le point AB_i par A′A″, la première lettre indiquant la composante isotrope positive et la seconde la composante isotrope négative.

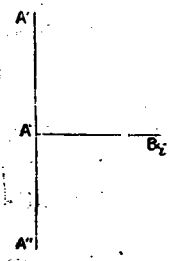

Fig. 1.

Nous ferons voir que ce dernier mode de représentation du point n'est autre que celui de Laguerre.

4. — Les points de la Géométrie générale présentent deux états distincts, suivant que les positions de leurs composantes sont séparées ou superposées.

Dans le premier cas, le point est dit *imaginaire;* dans le second cas, il est dit *réel.*

Le support d'un point réel est évidemment indéterminé; c'est une droite ordinaire assujettie seulement à passer par les composantes confondues de ce point.

5. — Nous dirons que deux points sont *imaginaires conjugués* quand les composantes isotropes positive et négative de l'un se confondent respectivement avec les composantes isotropes négative et positive de l'autre.

Il est facile de voir que deux points imaginaires conjugués ont la même composante origine et que leurs composantes termes sont symétriques par rapport à leur composante origine commune.

Un point réel est évidemment conjugué à lui-même.

Dans le plan réel nous utiliserons de préférence la représentation de Laguerre, et nous aurons soin de prévenir le lecteur quand, par exception, nous emploierons l'autre mode de représentation, qui trouvera son application naturelle dans la Géométrie de l'espace.

LA LIGNE DROITE

6. — Considérons deux figures inversement semblables, F et F′, de la Géométrie ordinaire, et soient A, A′; B, B′; C, C′;... des couples de points propres homologues dans ces deux figures.

Le lieu géométrique des points AA′, BB′, CC′..., désignés par leurs composantes isotropes, est une ligne de la Géométrie générale, à laquelle nous donnerons le nom de *ligne droite*.

Il résulte immédiatement de cette définition que deux points déterminent une droite et une seule passant par ces deux points, et qu'un point d'une droite donnée est déterminé quand on connaît l'une de ses composantes isotropes.

Nous démontrerons plus tard que la ligne droite de la Géométrie générale est le lieu géométrique des points correspondant à toutes les solutions, imaginaires et réelles, de l'équation cartésienne du premier degré, à coefficients imaginaires ou réels.

7. — Nous appellerons *caractéristique* d'une droite la racine carrée du rapport de similitude K^2 des figures F et F′ qui la déterminent.

Si AA′ et BB′ sont deux points quelconques d'une droite, le rapport des longueurs des droites ordinaires AB, A′B′, est évidemment égal au carré de la caractéristique K de la droite.

8. — Déterminons sur les droites ordinaires AA′, BB′, CC′, correspondant aux divers points d'une droite de Géométrie générale, les points ordinaires intérieurs α, β, γ,... qui divisent ces lignes dans le rapport du carré de la caractéristique K, c'est-à-dire tels que l'on ait :

$$K^2 = \frac{\alpha A}{\alpha A'} = \frac{\beta B}{\beta B'} = \frac{\gamma C}{\gamma C'} = \ldots\ldots$$

Par le point α menons les droites αP, $\alpha P'$ respectivement égales et

parallèles de même sens aux droites AB, A'B'. Les droites PB, P'B' sont parallèles et égales à αA, αA', et proportionnelles à βB, βB'.

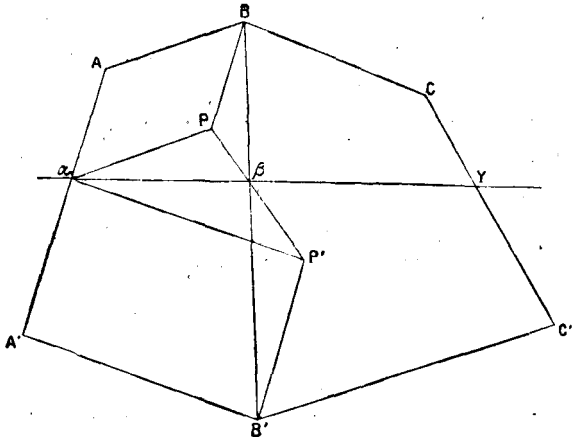

Fig. 2.

Par conséquent, les deux triangles βBP, βB'P', qui ont un angle égal compris entre deux côtés proportionnels, sont directement semblables et l'on a :

$$\frac{\beta P}{\beta P'} = \frac{\beta B}{\beta B'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{\alpha P}{\alpha P'}.$$

Donc $\frac{\beta P}{\beta P'} = \frac{\alpha P}{\alpha P'}$, et la droite $\alpha\beta$ est la bissectrice intérieure de l'angle PAP'.

On démontrerait de même que la droite $\alpha\gamma$ est la bissectrice intérieure de l'angle formé par les parallèles à AC, A'C' menées par α.

Les deux figures ABC..., A'B'C'... étant inversement semblables, les droites $\alpha\beta$ et $\alpha\gamma$ se confondent.

Donc les points α, β, γ... sont en ligne droite.

Nous donnerons à cette droite ordinaire $\alpha\beta\gamma$... le nom de *directrice* de la droite générale AA'BB'CC'...

Si par un point O de la directrice on mène deux droites OP, OP' égales et parallèles de même sens à deux segments homologues des figures F et F', la bissectrice intérieure de l'angle POP' du triangle POP' se confond avec la directrice.

9. — Le lieu des conjugués harmoniques des points α, β, γ..., par rapport aux segments AA', BB', CC'..., est une seconde droite perpendiculaire à la première.

M. Laisant a proposé de donner à ces deux droites le nom d'*axes de pseudo-symétrie*. (*Théorie et applications des équipollences*, page 179.)

On peut distinguer ces deux axes en les appelant *axe intérieur* et *axe extérieur*.

Quand la caractéristique est égale à l'unité, l'axe extérieur est la droite à l'infini.

Il est à remarquer que l'axe intérieur, que nous avons choisi pour directrice, est toujours une droite propre.

10. — Théorème. — *Une droite de la Géométrie générale est déterminée quand on connaît l'un de ses points* OO′, *la valeur* K *de sa caractéristique et la direction de sa directrice.*

En effet, soit PP′ un point quelconque d'une droite assujettie à ces conditions.

Le rapport des droites OP, O′P′ est égal à K^2 et l'angle formé par les semi-droites OP, O′P′ a sa bissectrice parallèle à la direction de la directrice.

Donc, les composantes isotropes P, P′ sont des points homologues de deux figures inversement semblables F, F′ parfaitement déterminées, ce qui démontre le théorème.

Si nous avions choisi pour directrice l'axe extérieur de pseudo-symétrie, il y aurait eu impossibilité ou indétermination dans le cas particulier où la caractéristique est égale à l'unité.

11. — Théorème. — *Deux droites se coupent en un point propre et un seul, ou n'ont aucun point propre commun.*

Considérons des points ordinaires quelconques A, B, C... comme étant les composantes isotropes positives de points appartenant à chacune des deux droites, et soient A′, B′, C′... et A″, B″, C″..., les composantes isotropes négatives qui leur correspondent dans ces droites.

Les figures de Géométrie ordinaire A′B′C′..., et A″B″C″..., inversement semblables à la figure ABC, sont directement semblables.

On déduit de là, par un raisonnement très simple, qu'il existe en général un point propre DD′, et un seul, commun aux deux droites; c'est le point dont la composante isotrope négative D′ est le centre de similitude des deux figures A′B′C′... et A″B″C″... directement semblables.

On sait construire le centre de similitude D′, et par conséquent le point de rencontre de deux droites.

Le seul cas où les deux droites n'ont pas un point propre commun est celui dans lequel les deux figures A′B′C′... et A″B″C″... sont égales et parallèles de même sens, ce qui exige que les deux droites considérées aient leurs caractéristiques égales et leurs directrices parallèles.

Et réciproquement, si deux droites ont leurs caractéristiques égales et leurs directrices parallèles, elles n'ont pas de point propre commun.

Remarquons que cette réciproque ne serait pas vraie si nous avions pris pour directrice l'axe extérieur de pseudo-symétrie.

En effet, deux droites dont la caractéristique est égale à l'unité ont le même axe extérieur, et leurs axes intérieurs, ou directrices, ne sont pas nécessairement parallèles.

12. — Nous dirons que deux droites sont *parallèles* quand elles ne se coupent pas en un point propre.

THÉORÈME. — *Par un point donné, on peut toujours mener une parallèle à une droite donnée, et on n'en peut mener qu'une.*

En effet la parallèle est parfaitement déterminée, puisque l'on connaît l'un de ses points, la valeur de sa caractéristique, égale à celle de la droite donnée, et la direction de sa directrice, parallèle à celle de la droite donnée.

Cette propriété nous autorise à admettre, comme en géométrie ordinaire, que deux parallèles se rencontrent en un point situé à l'infini.

Nous dirons donc que deux droites se rencontrent toujours en un point, propre ou à l'infini.

COROLLAIRE. — *Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.*

13. — Les composantes isotropes des différents points d'une droite sont des couples de points homologues de deux figures inversement semblables F, F′, et, par définition, tout point dont les composantes isotropes se confondent est un point réel de la Géométrie générale.

Par conséquent, toute droite dont la caractéristique est différente de l'unité possède un point réel propre, et un seul, qui se confond avec le point double des deux figures inversement semblables F, F′.

Le point double de deux figures inversement semblables est évidemment le point d'intersection de leurs axes de pseudo-symétrie.

Quand la caractéristique est égale à l'unité, la droite n'a plus de point réel propre, à moins que les figures F et F′ ne soient placées symétriquement.

Dans ce cas très particulier, la droite a une infinité de points réels, et chacun de ces points a pour l'un de ses supports la directrice, axe de symétrie des figures F et F′.

14. — Nous appellerons *droite réelle,* en Géométrie générale, toute droite qui possède plus d'un point réel.

Il résulte de ce qui précède que la droite réelle est le lieu géométrique de tous les points réels et imaginaires qui ont pour support la directrice de cette droite.

Le point situé à l'infini, sur une droite réelle, est évidemment un point réel.

Nous appellerons *droite imaginaire* toute droite qui n'est pas réelle.

Les droites imaginaires dont la caractéristique est égale à l'unité peuvent être considérées comme parallèles à des droites réelles; elles ont donc un point réel à l'infini.

Les autres droites imaginaires ont leur point à l'infini, imaginaire.

Toute droite imaginaire passe par un point réel et un seul, propre ou à l'infini, dont les composantes confondues sont situées sur la directrice de la droite. Nous donnerons à ce point réel le nom de *support* de la droite imaginaire.

La droite réelle a une infinité de points supports.

15. — THÉORÈME. — *Le lieu géométrique de tous les points imaginaires conjugués des points d'une droite donnée est une autre droite.*

On voit immédiatement que le lieu géométrique de ces points est une droite dont la caractéristique est égale à l'inverse de la caractéristique de la droite donnée.

On donne à ces deux droites le nom de *droites imaginaires conjuguées.*

Une droite réelle est évidemment conjuguée à elle-même.

Une droite réelle rencontre deux droites imaginaires conjuguées en deux points imaginaires conjugués.

16. — Nous avons vu que la construction du point support d'une

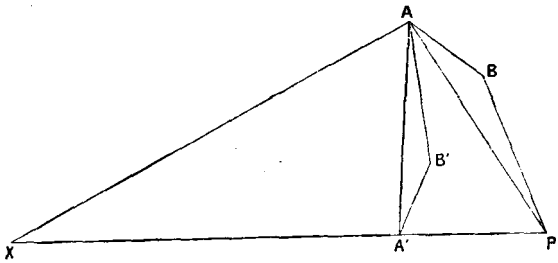

Fig. 3.

droite imaginaire donnée est ramenée à celle du point double de deux figures F et F', inversement semblables.

La solution suivante est une des plus simples.

Soient AB et A'B' deux segments homologues des figures F et F'.

Construisons le triangle ABP, inversement semblable au triangle A'B'A.

Au point P, dans la figure F, correspond le point A, dans la figure F'.

Menons par le point A la droite qui fait avec AA' un angle égal à l'angle A'PA, et soit X l'intersection de cette droite avec PA'.

Les deux triangles XPA et XAA' sont inversement semblables, et PA, AA' sont deux segments homologues dans les figures F, F'.

Donc le point X est le point double cherché.

LES DROITES ISOTROPES

17. — Les droites de la Géométrie générale sont déterminées par deux figures inversement semblables.

Il existe un cas particulier très intéressant, celui dans lequel l'une de ces deux figures se réduit à un point.

Quand ce cas se présente, la droite est dite *isotrope*.

Nous appellerons *droite isotrope positive* le lieu géométrique de tous les points qui ont pour composante isotrope positive un même point propre, lequel se confond avec le support de la droite.

La *droite isotrope négative* sera le lieu géométrique de tous les points dont les composantes isotropes négatives se confondent en un même point propre, support de la droite.

Les caractéristiques des droites isotropes positives et négatives sont respectivement égales à 0 et ∞ ; une droite isotrope a une infinité de directrices.

18. — Le point d'intersection d'une droite non isotrope avec une droite isotrope positive (ou négative) est évidemment le point de la droite non isotrope qui a pour composante isotrope positive (ou négative) le point ordinaire qui se confond avec le support de la droite isotrope.

Une droite isotrope positive, de support PP, et une droite isotrope négative, de support NN, ont évidemment un point commun et un seul : le point PN.

19. — Deux droites isotropes positives ne peuvent avoir un point propre commun sans se confondre, car ce point aurait deux composantes isotropes positives.

En outre, par un point donné, on ne peut mener qu'une seule droite ne rencontrant pas en un point propre une droite isotrope positive : c'est la droite isotrope positive qui passe par le point donné.

Nous sommes naturellement amenés à conclure de là que deux droites isotropes positives sont parallèles, et que toutes les droites isotropes positives passent par un même point fixe imaginaire, situé à l'infini.

Nous donnerons à ce point le nom de *point cyclique positif*.

Le *point cyclique négatif* sera le point fixe, imaginaire et à l'infini, commun à toutes les droites isotropes négatives.

Un seul point suffit pour déterminer une droite isotrope positive (négative), parce que cette droite est assujettie à passer par un second point déterminé : le point cyclique positif (négatif).

20. — Les droites isotropes positive et négative menées par le point PP′ passent respectivement par les points réels PP et P′P′, et le point imaginaire PP′ est le point d'intersection des droites isotropes positive et négative menées respectivement par les points réels PP et P′P′.

On voit donc que cette représentation géométrique du point imaginaire est identique à celle de Laguerre.

La droite imaginaire conjuguée d'une droite isotrope positive (négative) est évidemment la droite isotrope négative (positive) de même support.

LES POINTS A L'INFINI

21. — Nous avons démontré que, par un point propre donné, on ne peut mener qu'une seule droite rencontrant une droite donnée en un point à l'infini.

Nous pouvons conclure de là que toute droite a un point à l'infini et un seul.

En Géométrie ordinaire, tout point à l'infini est représenté par une droite propre, et considéré comme l'intersection de cette droite avec une autre qui lui est parallèle.

Pareillement, en Géométrie générale, tout point à l'infini est représenté par une droite propre, et considéré comme l'intersection de cette droite avec une de ses parallèles.

Deux droites parallèles ont leurs caractéristiques égales et leurs directrices parallèles; donc, donner la valeur de la caractéristique d'une droite et la direction de sa directrice revient à donner son point à l'infini.

C'est pourquoi une droite est déterminée quand on connaît l'un de ses points propres, sa caractéristique et la direction de sa directrice.

22. — En Géométrie ordinaire, on admet que le lieu géométrique des points à l'infini est une droite à l'infini.

Nous admettrons aussi, en Géométrie générale, que le lieu des points à l'infini, dans le plan réel, est une droite; cette droite possède une infinité de points réels à l'infini, et a pour directrice la droite ordinaire à l'infini.

La droite à l'infini ne se distingue de la droite réelle propre que par sa position.

On remarquera que le nombre de points à l'infini est égal au nombre de droites que l'on peut mener par un point propre quelconque, imaginaire ou réel, et par conséquent égal au nombre de points d'une droite quelconque imaginaire ou réelle.

Nous démontrerons plus tard, pour satisfaire entièrement le lecteur, que *la perspective du lieu géométrique des points à l'infini d'un plan réel, sur un autre plan réel non parallèle, est une droite réelle de la Géométrie générale.*

Le point à l'infini d'une droite peut être considéré comme le point d'intersection de cette droite avec la droite à l'infini.

23. — Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes suivants, sans aucune restriction.

Théorème. — *Par deux points quelconques, imaginaires ou réels, propres ou à l'infini, passe toujours une droite et une seule.*

THÉORÈME. — *Deux droites quelconques, imaginaires ou réelles, non isotropes ou isotropes, se rencontrent toujours en un point et un seul.*

La droite à l'infini, passant par les deux points cycliques, est isotrope; c'est la seule droite isotrope réelle.

Nous dirons que deux points à l'infini sont imaginaires conjugués, quand ils appartiennent à deux droites imaginaires conjuguées.

Les deux points cycliques sont évidemment imaginaires conjugués.

LES SEMI-DROITES

24. — En Géométrie ordinaire, on donne le nom de semi-droite à une droite décrite dans un sens donné; une droite ordinaire, pouvant être parcourue dans deux sens différents, détermine deux semi-droites opposées : une semi-droite positive et une semi-droite négative.

En Géométrie générale, nous déterminerons le sens d'une droite par le sens de sa directrice, et nous appellerons *semi-droite* la droite définie ainsi par sa position et le sens de sa directrice. Une droite détermine donc deux semi-droites de sens opposé, qui ont pour directrices les semi-droites de sa directrice.

En Géométrie ordinaire, on désigne sans ambiguïté une semi-droite AB par deux lettres A, B, affectées à deux de ses points, en convenant que le sens de la semi-droite est celui que décrit un mobile qui se rend du premier point A au second point B, par le chemin le plus court.

En Géométrie générale, il est utile de désigner aussi sans ambiguïté une semi-droite AA'BB', à l'aide seulement de deux de ses points AA' et BB'.

Par un point ordinaire quelconque O, menons des droites ordinaires OP et OP' respectivement égales et parallèles de même sens aux droites AB et A'B', puis construisons la bissectrice intérieure de l'angle POP' du triangle POP'.

Soit I l'intersection de cette bissectrice avec la droite PP'.

Nous savons que la directrice de la droite AA'BB' est parallèle à OI.

Nous appellerons *directrice de la semi-droite* AA'BB' celle des semi-droites ordinaires de sa directrice qui est parallèle de même sens à la semi-droite OI.

Grâce à cette convention, la semi-droite AA'BB' se trouve désignée sans ambiguïté, et l'on voit que la droite qui passe par les points AA' et BB' détermine deux semi-droites de sens opposé, AA'BB' et BB'AA'.

25. — La convention précédente est insuffisante quand les droites ordinaires AB, A'B' sont parallèles de sens contraire.

Dans ce cas particulier, nous choisirons pour directrice de la semi-

droite AA'BB' celle des semi-droites de la directrice de la droite AA'BB' avec laquelle la semi-droite AB fait un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$.

Il résulte de cette convention supplémentaire que la semi-droite AA'BB' est toujours déterminée sans ambiguïté.

26. — Pour les droites isotropes, ces conventions conduisent à la conclusion suivante :

Les directions correspondant à une droite isotrope sont indéterminées.

Par conséquent, les deux directions correspondant à une droite isotrope peuvent être considérées comme confondues entre elles; en d'autres termes, une direction isotrope se confond avec son opposée.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA DROITE IMAGINAIRE

27. — Considérons une droite imaginaire, de support OO, et construisons une droite réelle dont la directrice PQ soit perpendiculaire à la directrice de la droite imaginaire.

Les composantes isotropes V, V' du point d'intersection VV' de la droite réelle avec la droite imaginaire sont symétriques par rapport à la directrice PQ de la droite réelle; par conséquent la droite ordinaire VV' est parallèle à la directrice de la droite imaginaire.

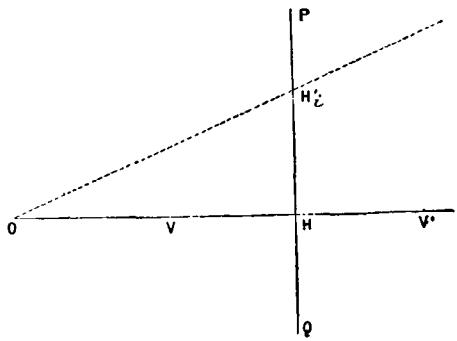

Fig. 4.

La bissectrice intérieure de l'angle VOV' du triangle VOV' est parallèle à la directrice de la droite imaginaire, et par suite, à la droite ordinaire VV'.

Donc les composantes V, V' sont situées sur la directrice de la droite imaginaire, d'un même côté par rapport au point ordinaire O.

Soient H, H'_i les composantes origine et terme du point VV'.

La composante origine H est évidemment située sur la directrice VV' de la droite imaginaire.

Appelons β l'angle HOH'_i.

Il est aisé de voir que l'angle β est compris entre $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$, et qu'il est positif ou négatif suivant que la valeur K de la caractéristique de la droite imaginaire, égale à $\sqrt{\frac{OV}{OV'}}$, est inférieure ou supérieure à l'unité.

De la relation :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{HH'_i}{OH} = \frac{\frac{1}{2}(OV' - OV)}{\frac{1}{2}(OV' + OV)},$$

l'on déduit : $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta} = \frac{OV}{OV'} = K^2,$$

ce qui démontre que l'angle β est constant et que la droite ordinaire OH'_i est fixe.

Désignons par leurs composantes origines et termes les points d'intersection AA'_i, BB'_i, CC'_i,... d'une droite imaginaire avec des droites réelles dont les directrices sont perpendiculaires à la directrice de la droite imaginaire.

De ce qui précède résulte le théorème suivant :

Le lieu géométrique des composantes origines A, B, C,... *des points* AA'_i, BB'_i, CC'_i..., *est la directrice de la droite imaginaire, et le lieu géométrique des composantes termes* A'_i, B'_i, C'_i, *est une autre droite fixe.*

Nous appellerons cette droite fixe *complémentaire.*

28. — Nous tracerons les droites complémentaires en pointillé, et nous marquerons de l'indice i leurs lettres indicatrices.

La connaissance de la directrice a d'une droite imaginaire et de sa complémentaire b_i détermine sans ambiguïté cette droite imaginaire, que nous désignerons par ab_i.

On voit que cette représentation géométrique d'une droite imaginaire ab_i est corrélative de notre représentation du point imaginaire AB_i par ses composantes origine et terme.

Les composantes a et b_i de la droite imaginaire se coupent en un point ordinaire O, qui se confond avec le point support OO de la droite imaginaire.

Il est presque évident que *deux droites imaginaires conjuguées ont la même directrice, et leurs complémentaires sont symétriques par rapport à leur directrice commune.*

29. — *Quand le point réel d'une droite imaginaire est situé à l'infini, la complémentaire de la droite est parallèle à la directrice.*

Nous allons démontrer directement cette proposition.

Construisons une droite réelle dont la directrice est perpendiculaire à la directrice d'une droite imaginaire ayant son point réel à l'infini.

Soient V, V' et H, H_i les composantes isotropes positive et négative et les composantes origine et terme du point d'intersection de ces deux droites

Le point VV′ appartenant à la droite réelle, la droite ordinaire VV′ est perpendiculaire à la directrice de la droite réelle, et parallèle à la directrice de la droite imaginaire.

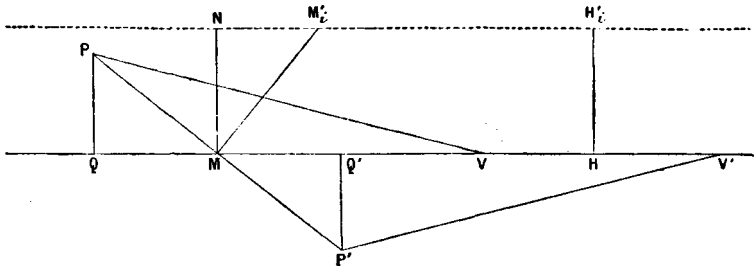

Fig. 5.

Le point ordinaire H, milieu du segment VV′, est nécessairement situé sur la directrice de la droite imaginaire, dont la caractéristique est égale à l'unité, puisque VV′ est un point de cette droite imaginaire.

Par conséquent, la droite ordinaire VV′ se confond avec la directrice de la droite imaginaire, et la composante origine H du point VV′ est située sur cette directrice.

Il reste à démontrer que la composante terme H_i est située sur une droite ordinaire fixe parallèle à la direction VV′.

Soit PP′ un point quelconque de la droite imaginaire.

Les droites ordinaires PV, P′V′ sont égales, et forment avec la directrice VV′ des angles égaux et de signe contraire.

Appelons Q, Q′ les projections des points ordinaires P, P′ sur la directrice VV′.

Les deux triangles PQV, P′Q′V′ sont symétriquement égaux.

Donc $QV = Q'V'$ et $HH'_i = \frac{VV'}{2} = \frac{QQ'}{2} = \text{const.}$ (C. Q. F. D.)

Quand la droite est réelle, la complémentaire se confond avec la directrice.

30. — Soient M, M'_i les composantes origine et terme du point PP′.

La composante origine M est le point de rencontre des droites ordinaires PP′ et QQ′.

Appelons N la projection de la composante terme M'_i sur la droite ordinaire perpendiculaire à la directrice QQ′ en M.

Les triangles MNM'_i, MQP, MQ′P′ sont égaux. Par conséquent :

$$MN = \frac{QQ'}{2} = HH'_i$$

et la composante terme M′ est située sur la complémentaire. Donc :

Théorème. — *Les lieux géométriques des composantes origines et termes de tous les points d'une droite imaginaire, dont la caractéristique est égale à l'unité, sont respectivement la directrice et la complémentaire de la droite imaginaire.*

Théorème. — *Le point d'intersection de deux droites, dont les caractéristiques sont égales à l'unité, a pour composante origine le point d'intersection des directrices de ces droites, et pour composante terme le point d'intersection de leurs complémentaires.*

En effet, le point ainsi déterminé appartient à l'une et à l'autre de ces droites.

31. — Si l'on veut appliquer ce mode de représentation aux droites isotropes, on voit que la directrice a une direction quelconque, mais que la complémentaire fait avec la directrice un angle constamment égal à $+\frac{\pi}{4}$ ou $-\frac{\pi}{4}$, suivant que la droite isotrope est positive ou négative.

Le théorème suivant devient presque évident :

Quand un plan tourne sur lui-même autour de l'un de ses points réels, les deux droites isotropes qui passent par le centre de rotation restent immobiles.

32. — Quand on donne les composantes, directrice et complémentaire, d'une droite, on donne son point réel, la direction de sa directrice et la valeur de sa caractéristique.

La valeur K de cette caractéristique est liée à la grandeur de l'angle φ, que fait la complémentaire avec la directrice, par la relation :

$$K^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right).$$

Pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit qu'elles aient leurs directrices parallèles et leurs complémentaires parallèles.

Ce qui revient à dire qu'il est nécessaire et suffisant qu'elles aient leurs directrices parallèles et leurs caractéristiques égales, proposition que nous avons démontrée.

DES SEGMENTS — DÉFINITION DE L'ÉGALITÉ

33. — En Géométrie ordinaire, on désigne la grandeur d'un segment situé sur une semi-droite XY par ses deux points limites, en écrivant en premier le point origine A, et en second le point extrême B, et en faisant précéder la désignation AB du signe + ou —, suivant que la

semi-droite AB est de même sens que la semi-droite XY ou de sens contraire.

Par extension et convention, en Géométrie générale, nous désignerons la grandeur d'un segment situé sur une semi-droite XX'YY' par $+$ AA'BB' ou $-$ AA'BB', AA' et BB' étant les points origine et extrême de ce segment, en prenant le signe $+$ ou $-$, suivant que la semi-droite AA'BB' est de même sens que la semi-droite XX'YY' ou de sens contraire.

Désignons par d, d' les longueurs des droites ordinaires AB, A'B' et par α la plus petite valeur de l'angle que fait la semi-droite ordinaire AB avec la directrice de la semi-droite XX'YY'.

Nous appellerons *module* du segment la quantité $+\sqrt{d.d'}$, et *argument* la valeur de l'angle α.

Il est aisé de voir que le segment considéré est $+$ AA'BB' ou $-$ AA'BB', suivant que cos α est positif ou négatif.

Dans le cas particulier où cos α est nul, nous conviendrons de donner au segment le segment $+$ ou $-$, suivant que l'angle α est égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

Le signe du segment sera donc toujours déterminé sans ambiguïté.

Quand un segment n'est précédé d'aucun signe, il est sous-entendu qu'il doit être accompagné du signe $+$.

34. — Par définition, nous dirons que *deux segments sont égaux quand ils ont leurs modules égaux et leurs arguments égaux.*

Pour désigner la grandeur d'un segment, nous emploierons la notation symbolique $m.\varepsilon^{\alpha}$, m étant égal au module de ce segment et α à son argument.

Il résulte de notre définition que l'égalité :

$$m.\varepsilon^{\alpha} = m'.\varepsilon^{\alpha}$$

entraîne les suivantes :

$$m = m' \text{ et } \alpha = \alpha'.$$

Nous admettrons que la grandeur d'un segment est nulle quand son module est égal à 0.

Pour ne pas être en désaccord avec la Géométrie ordinaire, nous admettrons encore que l'on a :

$$\varepsilon^{0} = +1 \text{ et } \varepsilon^{\pm\pi} = -1.$$

35. — Problème. — *Sur une semi-droite donnée* XX'YY', *non isotrope, déterminer un segment égal à un segment donné, connaissant son point origine* PP'.

Appelons QQ′ le point extrême à déterminer, et soit $m.\varepsilon^{\alpha}$ la grandeur du segment donné.

Les semi-droites ordinaires PQ, P′Q′ faisant avec la directrice de la semi-droite XX′YY′ des angles respectivement égaux à $+\alpha$ et $-\alpha$, on connaît les directions des semi-droites PQ, P′Q′.

On connaît aussi les longueurs PQ, P′Q′, car leur rapport est égal à celui du carré de la caractéristique de la droite XX′YY′ et leur moyenne proportionnelle est égale au module m.

Le point QQ′ est donc déterminé sans ambiguïté, et le problème a toujours une solution et une seule.

Le segment cherché est le segment de la semi-droite XX′YY′ qui a pour point origine PP′ et pour point extrême QQ′.

On voit qu'un segment est parfaitement déterminé quand on connaît son point origine, son point extrême et la semi-droite à laquelle il appartient.

Les segments PP′QQ′ et QQ′PP′ d'une même semi-droite ne sont pas égaux; leurs modules sont égaux, mais leurs arguments diffèrent de $\pm\pi$.

36. — La convention du § 33 permet de désigner la grandeur d'un segment PP′QQ′ de la semi-droite XX′YY′ sans faire intervenir cette semi-droite; il suffit de donner au segment PP′QQ′ le signe + ou —, suivant que la semi-droite XX′YY′ se confond avec la semi-droite PP′QQ′ ou son opposée QQ′PP′.

Les segments PP′QQ′ et QQ′PP′ d'une même semi-droite ne sont pas égaux; mais les segments + PP′QQ′ et + QQ′PP′ sont égaux, et appartiennent à des semi-droites opposées.

Les segments — PP′QQ′ et — QQ′PP′ sont aussi égaux.

Les segments + PP′QQ′ et — QQ′PP′ ne sont pas égaux, ni les segments — PP′QQ′ et + QQ′PP′; leurs arguments diffèrent de $\pm\pi$.

37. — Le module d'un segment d'une droite isotrope étant égal à 0, la grandeur de ce segment est aussi égale à 0.

Ainsi, en Géométrie générale, deux points peuvent être à une distance nulle sans cependant se confondre.

Le lieu géométrique des points qui sont à une distance nulle d'un point donné se compose évidemment des deux droites isotropes passant par ce point.

La distance d'un point propre à un point cyclique a pour module la quantité indéterminée $0.\infty$; l'argument est aussi indéterminé.

On conclut de là que *la distance d'un point propre à un point cyclique est entièrement indéterminée et peut être considérée comme égale à une distance donnée quelconque.*

ADDITION ET SOUSTRACTION DES SEGMENTS

38. — Supposons que deux segments donnés soient placés d'une manière quelconque.

Sur une semi-droite non isotrope, prise arbitrairement, construisons un segment PP′QQ′ égal au premier, puis, à la suite, le segment QQ′RR′ égal au second.

Au lieu des segments donnés, nous aurons les segments consécutifs PP′QQ′, QQ′RR′ d'une même semi-droite.

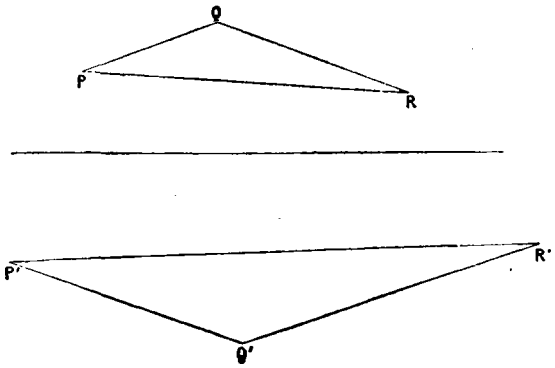

Fig. 6.

Par définition, nous dirons que *le segment* PP′RR′, *qui joint l'origine du premier à l'extrémité du second, est égal à la somme des segments donnés.*

Pour que cette définition puisse être admise, il suffit de démontrer que la grandeur du segment PP′RR′ dépend uniquement des grandeurs $m.\varepsilon^{\alpha}$, $m'.\varepsilon^{\alpha'}$ des segments donnés.

Les semi-droites PQ, QR faisant avec la directrice de la semi-droite considérée des angles respectivement égaux à α et α', l'angle PQR a une grandeur constante, dépendant uniquement des valeurs de α et α'.

En outre, le rapport $\frac{QP}{QR}$ est égal à $\frac{Q'P'}{Q'R'}$, par conséquent à $\frac{\sqrt{QP.Q'P'}}{\sqrt{QR.Q'R'}}$, c'est-à-dire au rapport $\frac{m}{m'}$ des modules; il est donc constant.

Il résulte de là que le triangle PQR est de similitude constante, ainsi que le triangle P′Q′R′, qui lui est inversement semblable, et que les semi-droites PR, P′R′ font avec la directrice de la semi-droite considérée des angles dont les grandeurs dépendent uniquement des valeurs $m.\varepsilon^{\alpha}$ et $m'.\varepsilon^{\alpha'}$.

Donc le segment PP′RR′ a une grandeur indépendante des choix de la semi-droite et du point origine, ce qui légitime notre définition.

La somme des deux segments AA′BB′ et BB′AA′ d'une même semi-droite est évidemment nulle et l'on peut écrire :

$$AA'BB' + BB'AA' = 0 \text{ ou } AA'BB' = -BB'AA'.$$

39. — La soustraction se ramène immédiatement à l'addition, en vertu de l'égalité :

$$AA'BB' - CC'DD' = AA'BB' + DD'CC'.$$

Il est presque évident que, *dans une somme algébrique de plusieurs segments, on peut intervertir l'ordre des segments sans altérer le résultat.*

MULTIPLICATION ET DIVISION DES SEGMENTS

40. — Nous adopterons la définition suivante de la multiplication.

Le produit de deux segments donnés est égal à tout segment qui a pour module le produit des modules des deux segments donnés et pour argument la somme de leurs arguments.

Si $m.\varepsilon^{\alpha}$ et $m'.\varepsilon^{\alpha'}$ sont les grandeurs des deux segments donnés, tout segment de grandeur $m.m'\varepsilon^{\alpha+\alpha'}$ est égal au produit de ces deux segments.

41. — La définition de la multiplication entraîne celle de la division.

Le quotient ou rapport de deux segments est égal à tout segment qui a pour module le quotient des modules de ces deux segments, et pour argument la différence de leurs arguments.

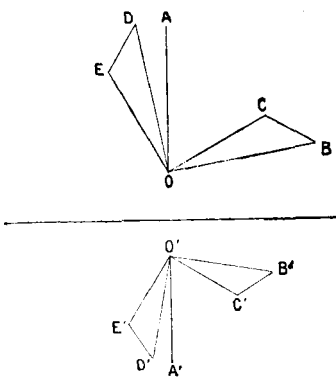

Fig. 7.

Ainsi le rapport d'un segment de grandeur $m.\varepsilon^{\alpha}$ à un segment de grandeur $m'.\varepsilon^{\alpha'}$ est un segment de grandeur $\frac{m}{m'}.\varepsilon^{\alpha-\alpha'}$.

42. — La définition donnée pour la multiplication montre que le produit de plusieurs segments est indépendant de l'ordre des facteurs, c'est-à-dire que la multiplication est *commutative*.

Nous allons démontrer qu'elle est de plus *distributive*.

Sur une semi-droite construisons des segments OO'AA', OO'BB', BB'CC' respectivement égaux à trois segments donnés quelconques. Il s'agit de démontrer qu'on a l'égalité :

$$OO'AA'\,(OO'BB' + BB'CC') = OO'AA'.OO'BB' + OO'AA'.BB'CC'.$$

Soit $a.\varepsilon^{\alpha}$ la valeur de la grandeur du segment OO'AA'.

Modifions dans le rapport $\frac{a}{1}$ les lignes OB, OC, puis faisons les tourner autour du point O d'un angle égal à α; nous obtiendrons un triangle ODE directement semblable au triangle OBC.

Le rapport de similitude du triangle ODC au triangle OBC est égal à a, et les côtés du premier forment avec les côtés correspondants du second un angle égal à α.

Dans la figure O'A'B'C', inversement semblable à la figure OABC, soit O'D'E' le triangle correspondant au triangle ODE.

Les triangles O'D'E', O'B'C' sont directement semblables, leur rapport de similitude est égal à a, et les côtés du premier forment avec les côtés correspondants du second un angle égal à $-\alpha$.

Il est aisé de voir qu'on a :

$$OO'AA'.OO'BB' = OO'DD', \quad OO'AA'.OO'CC' = OO'EE',$$
$$OO'AA'.BB'CC' = DD'EE', \quad OO'BB' + BB'CC' = OO'CC',$$
$$OO'DD' + DD'EE' = OO'EE'.$$

Par conséquent :

$$OO'AA'(OO'BB' + BB'CC') = OO'AA'.OO'CC' = OO'EE',$$
$$OO'AA'.OO'BB' + OO'AA'.BB'CC' = OO'DD' + DD'EE' = OO'EE'.$$

Donc :

$$OO'AA'(OO'BB' + BB'CC') = OO'AA'.OO'BB' + OO'AA'.BB'CC'.$$

Ce qui établit la proposition en démonstration.

On reconnaît que les quatre opérations fondamentales du calcul des segments sont soumises aux mêmes règles que celles du calcul algébrique.

CORRÉLATION ALGÉBRIQUE

43. — Les grandeurs des segments sont exprimées, en Géométrie générale, par des symboles de la forme $m.\varepsilon^{\alpha}$, et nous venons de reconnaître que les quantités géométriques désignées par ces symboles étaient soumises aux mêmes règles que les quantités algébriques des symboles correspondants de l'Algèbre ordinaire.

Cette propriété va nous permettre de déterminer la valeur de ε.

Sur une semi-droite réelle, à partir de l'un de ses points réels AA, construisons le segment AABB' égal à ε^{α}.

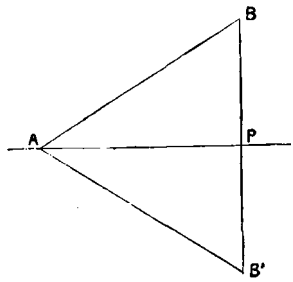

Fig. 8.

Il est clair que les longueurs des droites ordinaires AB, AB' sont égales à l'unité, et que les semi-droites AB, AB' font avec la directrice de la semi-droite réelle de Géométrie générale des angles respectivement égaux à $+\alpha$ et $-\alpha$.

Les projections des composantes isotropes B, B' du point BB' sur la directrice de cette semi-droite se confondent en un même point P.

Par conséquent, en vertu de notre définition de l'addition, le segment AABB′ est égal à la somme des segments AAPP et PPBB′.

$$\text{AABB}' = \text{AAPP} + \text{PPBB}'.$$

Et l'on a :

$$\text{AAPP} = \cos\alpha \text{ et } \text{PPBB}' = \varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha.$$

Désignons par le signe spécial i la quantité géométrique $\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$.

L'égalité précédente peut s'écrire sous cette forme :

$$\varepsilon^{\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha.$$

44. — Le carré du segment de grandeur i, ou $\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$, est évidemment égal à un segment de grandeur ε^{π} ou -1.

Le carré de la quantité géométrique représenté par i est donc exactement le même que celui de la quantité algébrique représentée par le symbole $\sqrt{-1}$, ce qui nous autorise à formuler ce principe :

Le symbole i, *dans le calcul des segments, est soumis aux mêmes règles que le symbole* $\sqrt{-1}$ *en Algèbre.*

Posons $a = m \,.\, \cos\alpha$ et $b = m \,.\, \sin\alpha$, il vient :

$$m.\varepsilon^{\alpha} = a + bi.$$

Il y a donc identité entre les quantités géométriques étudiées dans le calcul des segments et les quantités imaginaires de l'Algèbre.

45. — Reportons-nous à la dernière figure.

Sur la semi-droite réelle AABB′, la distance AABB′ du point imaginaire BB′ au point réel AA est égale à :

$$\text{AP} + \text{PB}\sqrt{-1}.$$

Ce qui démontre que la représentation d'un point imaginaire BB′, au moyen de sa droite support AP et de sa composante isotrope positive B, est identique à la représentation d'Argand.

46. — On voit clairement que notre définition de l'addition exprime les relations suivantes :

$$(m.\varepsilon^{\alpha} + m'.\varepsilon^{\alpha'}) = (m.\cos\alpha + m'\cos\alpha') + (m.\sin\alpha + m'.\sin\alpha')i,$$
$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i.$$

En posant simplement les identités :

$$\varepsilon^{\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \varepsilon^{-\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha,$$

on obtient par addition et soustraction les formules :

$$\frac{\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{-\alpha}}{2} = \cos\alpha, \quad \frac{\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{-\alpha}}{2i} = \sin\alpha.$$

Nous démontrerons plus tard que ces formules sont encore exactes quand α est imaginaire.

47. — En vertu de la formule d'Euler :

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

le symbole ε n'est autre que e^i, e étant la base des logarithmes népériens.

LOGARITHMES GÉOMÉTRIQUES

48. — L'identité des symboles ε^β et $e^{\beta i}$ conduit naturellement à adopter le symbole $\varepsilon^{\beta i}$ pour la représentation du nombre réel $e^{-\beta}$.

Nous conviendrons de représenter par le symbole $\varepsilon^{\beta i}$ *le nombre réel positif* m *déterminé par la relation* $\mathrm{m} = \mathrm{e}^{-\beta}$.

Grâce à cette convention, tout nombre géométrique $m.\varepsilon^\alpha$ pourra être mis sous la forme $\varepsilon^{\alpha+\beta i}$.

Nous dirons que le nombre $\alpha + \beta i$ est le *logarithme géométrique* du nombre $\varepsilon^{\alpha+\beta i}$.

Ainsi $\alpha + \beta i = \mathrm{L}\varepsilon^{\alpha+\beta i} = \mathrm{L}e^{-\beta}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Le logarithme géométrique $\alpha + \beta i$ du nombre $a + bi$ s'obtient en posant $e^{-\beta} = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Les logarithmes népériens s'obtiennent en multipliant par i *les logarithmes géométriques.*

Dans le système des logarithmes géométriques, dont la base est ε ou e^i :

x est le logarithme de	$\cos x + i\sin x$,	
xi celui de	$(\cos x + i\sin x)^i$,	
$\frac{\pi}{2}i$ celui de	i^i.	

49. — Il est à remarquer que *toute quantité géométrique est réductible à la forme* a + bi, en Géométrie générale.

Les quantités imaginaires de la forme $a + bi$ sont d'ailleurs les seules que l'Algèbre ordinaire nous impose.

Les autres espèces d'imaginaires ont été inventées par notre imagination; nous verrons qu'elles ne sont nullement nécessaires pour représenter les figures imaginaires dans l'espace et dans le plan imaginaire.

DES ANGLES — DÉFINITION DE L'ÉGALITÉ

50. — En Géométrie générale, comme en Géométrie ordinaire, deux semi-droites déterminent un angle.

Nous appellerons *rapport segmentaire* d'un angle le rapport géométrique qui a pour module le rapport des caractéristiques des semi-droites qui sont les côtés extrême et origine de l'angle, et pour argument l'angle formé par les directrices de ces côtés.

51. — Par définition, nous dirons que *la grandeur géométrique d'un angle est égale au logarithme géométrique de son rapport segmentaire.*

Soient OO′ le sommet, et OO′AA′, OO′BB′ les côtés origine et extrême d'un angle AA′OO′BB′.

Désignons par θ l'angle réel que fait la directrice de la semi-droite OO′BB′ avec la directrice de la semi-droite OO′AA′, prise pour origine, et par $\varepsilon^{\beta i}$, $\varepsilon^{\alpha i}$ les caractéristiques des côtés OO′BB′ et OO′AA′.

D'après nos définitions, le rapport segmentaire de l'angle AA′OO′BB′ est égal à $\varepsilon^{\theta+(\beta-\alpha)i}$ et sa grandeur géométrique est $\theta+(\beta-\alpha)i$.

52. — Un angle est réel ou imaginaire, suivant que sa grandeur est exprimée par une quantité réelle ou imaginaire.

Pour que deux semi-droites se coupent sous un angle réel, il faut et il suffit évidemment qu'elles aient leurs caractéristiques égales.

Une droite réelle ne peut former un angle réel qu'avec une droite réelle ou une droite imaginaire dont le point réel est situé à l'infini.

53. — Une droite isotrope positive (ou négative) peut être considérée comme une semi-droite dont la caractéristique est nulle (ou infiniment grande) et dont la directrice a une direction indéterminée.

Il suit de là que la partie réelle de l'angle formé par deux semi-droites, dont une au moins est isotrope, est toujours indéterminée.

On voit que la partie imaginaire de cet angle est infiniment grande, positive ou négative, excepté quand les côtés de l'angle sont deux droites isotropes positives ou deux droites isotropes négatives.

Dans ce cas particulier, la partie imaginaire, se présentant sous la forme $+\infty-\infty$, est aussi indéterminée que la partie réelle.

On peut admettre que *deux droites isotropes de même nom, distinctes ou confondues, forment un angle égal à un angle donné quelconque.*

54. — Nous dirons que *deux angles sont égaux quand leurs grandeurs géométriques sont égales.*

Deux angles sont évidemment égaux quand leurs rapports segmentaires sont égaux.

Il est à remarquer que, d'après la définition, nous ne considérons

comme égaux, au point de vue de la représentation, que les angles qui ne peuvent différer que d'un multiple de 2π, absolument comme en Géométrie ordinaire.

Un même angle a, en réalité, une infinité de valeurs, et ce serait une erreur grossière de dire que deux angles qui diffèrent d'un multiple de 2π sont égaux.

Quand nous disons que deux angles sont égaux, il est bien entendu que nous affirmons seulement que ces deux angles sont égaux au point de vue de leur représentation matérielle, puisqu'ils peuvent différer d'un multiple de 2π.

55. — En Géométrie ordinaire, un angle ABC est parfaitement déterminé lorsqu'on donne le terme de points A, B, C, qui servent à le désigner.

Il est admis que le sommet est le point B du milieu, et que l'angle est l'inclinaison que fait la semi-droite BC, côté extrême de l'angle, avec la semi-droite BA, côté origine.

Pareillement, en Géométrie générale, l'angle AA'BB'CC' est déterminé sans ambiguïté.

Son sommet est le point BB', sa partie réelle est l'angle que fait la directrice de la semi-droite BB'CC' avec la directrice de la semi-droite BB'AA', prise pour origine, et sa partie imaginaire βi s'obtient en égalant $-\beta$ au logarithme népérien du rapport des caractéristiques des côtés extrême et origine de l'angle, BB'CC' et BB'AA'.

56. — Problème. — *Par un point donné mener une semi-droite faisant avec une semi-droite donnée* LL'MM' *un angle égal à un angle donné* AA'BB'CC'.

On connaît l'angle réel que fait la directrice de la semi-droite cherchée avec la directrice de la semi-droite LL'MM', angle égal à celui que fait la directrice de la semi-droite BB'CC' avec la directrice de la semi-droite BB'AA'.

On connaît aussi la valeur de la caractéristique de la semi-droite cherchée, car le rapport de cette caractéristique à la caractéristique de la semi-droite LL'MM' est égal au rapport des caractéristiques des semi-droites BB'CC' et BB'AA'.

La semi-droite cherchée est donc parfaitement déterminée, puisque l'on connaît l'un de ses points, la direction et le sens de sa directrice, et la valeur de sa caracteristique.

57. — On dit que deux droites sont *perpendiculaires* quand elles se coupent sous un angle égal à un angle droit.

Il résulte de cette définition que deux droites perpendiculaires ont leurs caractéristiques égales et leurs directrices perpendiculaires, par conséquent :

Par un point donné on peut toujours mener une perpendiculaire à une droite donnée, et on n'en peut mener qu'une.

Par un point donné on peut mener deux semi-droites perpendiculaires à une semi-droite donnée.

Ces deux semi-droites font avec la semi-droite donnée des angles égaux à $+\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$; elles appartiennent à une même droite et sont aussi perpendiculaires à la semi-droite opposée à la semi-droite donnée.

58. — Par un point donné on peut aussi mener deux semi-droites parallèles à une semi-droite donnée.

Ces deux semi-droites sont les directions opposées d'une même droite; elles font avec la semi-droite donnée des angles respectivement égaux à 0 et $\pm\pi$, suivant qu'elles sont parallèles de même sens ou de sens contraire.

ADDITION ET SOUSTRACTION DES ANGLES

59. — *Quand trois semi-droites* OO'AA', OO'BB', OO'CC' *passent par un même point* OO', *la somme des angles* AA'OO'BB' et BB'OO'CC' *est dite égale à l'angle* AA'OO'CC'.

Soit $\varepsilon^{\alpha i}$, $\varepsilon^{\beta i}$, $\varepsilon^{\gamma i}$ les valeurs des caractéristiques des semi-droites OO'AA', OO'BB', OO'CC' et θ, θ' les angles formés par les directrices des couples de semi-droites OO'AA', OO'BB' et OO'BB', OO'CC'.

On a immédiatement les égalités :

$$\widehat{AA'OO'BB'} = \theta + (\beta - \alpha)i,$$
$$\widehat{BB'OO'CC'} = \theta' + (\gamma - \beta)i,$$
$$\widehat{AA'OO'CC'} = \theta + \theta' + (\gamma - \alpha)i.$$

Cette dernière égalité peut s'écrire :

$$\widehat{AA'OO'CC'} = [\theta + (\beta - \alpha)i] + [\theta' + (\gamma - \beta)i].$$

Donc, *la grandeur d'un angle, égal à la somme de deux angles donnés, est égale à la somme des grandeurs de ces angles.*

Ce qui justifie notre définition de la grandeur de l'angle.

La somme des angles AA'OO'BB' et BB'OO'AA' est évidemment nulle.

Nous donnerons le nom d'*angles inverses* à deux angles dont la somme est nulle.

60. — La définition de l'addition entraîne celle de la soustraction. On a donc :

$$\widehat{AA'OO'BB'} - \widehat{AA'OO'CC'} = \widehat{AA'OO'BB'} + \widehat{CC'OO'AA} = \widehat{CC'OO'BB'}.$$

Le problème suivant ne présente aucune difficulté.

Construire un angle égal à la somme ou à la différence de deux angles donnés.

REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA GRANDEUR DE L'ANGLE IMAGINAIRE

61. — Par un point réel OO d'une semi-droite réelle donnée, menons la semi-droite imaginaire qui fait avec cette semi-droite réelle un angle égal à $\alpha + \beta i$.

Figurons la semi-droite imaginaire au moyen de notre représentation géométrique, c'est-à-dire par sa directrice et sa complémentaire.

Décrivons du point ordinaire O, comme centre, un cercle de rayon $\sqrt{2}$.

Soient A et B les points d'intersection de ce cercle avec la directrice de la semi-droite réelle et la directrice de la semi-droite imaginaire.

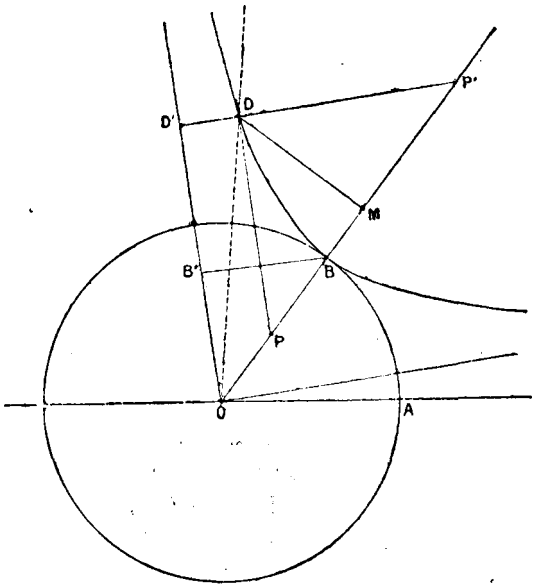

Fig. 9.

Les points ordinaires A et B sont déterminés sans ambiguïté.

Construisons l'hyperbole équilatère qui a pour axe réel le diamètre du cercle qui aboutit au point B.

La branche de cette hyperbole qui passe par le sommet B, situé sur la directrice de la semi-droite imaginaire, coupe la complémentaire de cette semi-droite en un point D.

Désignons par s, la surface du secteur AOB du cercle, et par s' la surface du secteur BOD de l'hyperbole équilatère, ces surfaces étant affectées du même signe, positif ou négatif, que les angles correspondants AOB, BOD.

Les nombres s, s', qui mesurent ces surfaces, expriment les rapports de ces surfaces à la surface du carré qui a pour diagonale le rayon $\sqrt{2}$ du cercle.

Nous allons démontrer que les nombres s et s' sont respectivement égaux aux nombres α et β.

Par définition l'angle AOB est égal à α.

Or la surface du secteur AOB a pour mesure la moitié du produit de la longueur $\sqrt{2}$ du rayon par la longueur $\alpha\sqrt{2}$ de l'arc.

Donc, $s = \alpha$.

Soient B', D' les pieds des perpendiculaires abaissées des points B, D sur l'asymptote de la demi-branche d'hyperbole qui passe par le point D.

Appelons P' le point d'intersection des droites OB, DD', et P le point d'intersection de OB avec la parallèle menée par D à l'asymptote B'D'.

Il est facile de voir que le milieu M de PP' est le pied de la perpendiculaire abaissée du point D de l'hyperbole équilatère sur son axe réel, et que P, P' sont les composantes isotropes positive et négative d'un point PP' de la semi-droite imaginaire donnée.

Désignons par a, a' les distances OP, OP'.

Le point D appartenant à une hyperbole équilatère, on a :

$$OB^2 = OM^2 - MD^2 = OM^2 - MP^2 = OP.OP' = a.a',$$

d'où :

$$a.a' = 2.$$

Les lignes OB', B'B étant égales à l'unité, la surface BB'D'D, comprise entre l'hyperbole, l'asymptote B'D' et les perpendiculaires BB' et DD' à cette asymptote, a pour mesure le logarithme népérien du nombre qui mesure la longueur de la ligne OD'.

Or, cette surface est équivalente à la surface s' du secteur hyperbolique BOD.

Par conséquent $s' = \log OD'$.

D'où l'on déduit successivement :

$$e^{s'} = OD' = \frac{OP'}{\sqrt{2}} = \frac{a'}{\sqrt{2}} = \frac{a'}{\sqrt{a.a'}} = \sqrt{\frac{a'}{a}} = \frac{1}{K},$$

K étant la valeur de la caractéristique de la semi-droite imaginaire considérée.

On a :

$$\varepsilon^{s'i} = e^{-s'} = K = \varepsilon^{\beta i},$$

et, par suite,

$$s' = \beta.$$

Nous avons donc démontré qu'on a l'égalité :

$$\alpha + \beta i = s + s'i.$$

Il est intéressant de remarquer que cette représentation géométrique de la grandeur de l'angle imaginaire $\alpha + \beta i$ est identique à celle donnée par M. Marie, dans sa *Théorie des fonctions des variables imaginaires* (t. Ier, chap. XVII, § 233).

TRANSFORMATION DES RELATIONS ANGULAIRES

62. — Théorème fondamental. — *La grandeur d'un angle est égale au logarithme géométrique du rapport des distances de son sommet aux points d'intersection de ses côtés avec une droite isotrope quelconque.*

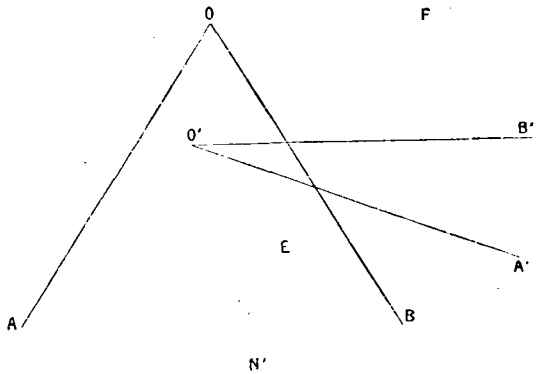

Fig. 10.

Supposons d'abord que la droite soit isotrope négative.

Soient EN', FN' les points d'intersection des côtés origine et extrême, OO'AA' et OO'BB', d'un angle AA'OO'BB' avec une droite isotrope négative de support N'.

Le point EN' appartenant à la droite OO'AA', les triangles OAE, O'A'N sont inversement semblables, par conséquent :

$$\frac{OE}{O'N'} = \frac{OA}{O'A'}.$$

On a pareillement :

$$\frac{OF}{O'N'} = \frac{OB}{O'B'}.$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{\sqrt{OF.O'N'}}{\sqrt{OE.O'N'}} = \sqrt{\frac{OB}{O'B'}} : \sqrt{\frac{OA}{O'A'}}.$$

Donc le rapport des modules des segments OO'FN' et OO'EN', déterminés sur les côtés extrême et origine de l'angle AA'OO'BB', est égal au rapport des caractéristiques de ces côtés, et, par conséquent, au module du rapport segmentaire de l'angle.

Appelons α et β les angles que font les directrices des semi-droites OO'AA', OO'BB' avec la semi-droite ordinaire O'N', prise pour origine.

Il est clair que la directrice du côté extrême OO'BB' de l'angle AA'OO'BB' fait avec la directrice du côté origine OO'AA' un angle égal à $\beta - \alpha$.

Le segment OO'EN' de la semi-droite OO'AA' a la même directrice que cette semi-droite.

Par conséquent, l'argument du segment OO'EN' est égal à α.

Pareillement, l'argument du segment OO'FN' est égal à β.

Donc la différence des arguments des segments OO'FN' et OO'EN' est égale à l'argument du rapport segmentaire de l'angle AA'OO'BB'.

Il résulte de ce qui précède que le rapport des grandeurs des segments déterminés sur les côtés extrême et origine d'un angle, par une droite isotrope négative quelconque, est égal au rapport segmentaire de cet angle.

Si la transversale était une droite isotrope positive, on démontrerait, par la même méthode, que le rapport des segments déterminés sur les côtés origine et extrême est égal au rapport segmentaire de l'angle.

Donc le rapport segmentaire d'un angle est toujours égal au rapport des grandeurs des segments déterminés sur ses côtés par une droite isotrope quelconque.

Ce qui démontre le théorème.

Le théorème fondamental peut s'énoncer sous cette autre forme :

Le rapport des segments déterminés sur les deux côtés d'un angle de grandeur $\alpha + \beta i$, *par une droite isotrope quelconque, est égal à :*

$$e^{(\alpha+\beta i)i}$$

e *étant la base des logarithmes népériens et* i *désignant le symbole* $\sqrt{-1}$.

De ce théorème fondamental nous déduirons, plus tard, la généralisation du théorème de Laguerre, que nous énoncerons ainsi :

Le double de la grandeur d'un angle est égal au logarithme géométrique du rapport anharmonique du faisceau formé par les deux côtés de l'angle et les deux droites isotropes passant par son sommet.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER. — IMPRIMERIE CHAIX. — 3910-2-90.

ASSOCIATION FRANÇAISE

POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

EXTRAIT DES STATUTS ET RÈGLEMENT

STATUTS

ART. 4. — L'Association se compose de membres fondateurs et de membres ordinaires; les uns et les autres sont admis, sur leur demande, par le Conseil.

ART. 6. — Sont membres fondateurs les personnes qui auront souscrit, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social : ces parts sont de 500 francs.

ART. 7. — Tous les membres jouissent des mêmes droits. Toutefois, les noms des membres fondateurs figurent perpétuellement en tête des listes alphabétiques, et les membres reçoivent gratuitement, pendant toute leur vie, autant d'exemplaires des publications de l'Association qu'ils ont souscrit de parts du capital social.

RÈGLEMENT

ART. 1er. — Le taux de la cotisation annuelle des membres non fondateurs est fixé à 20 francs.

ART. 2. — Tout membre a le droit de racheter ses cotisations à venir en versant, une fois pour toutes, la somme de 200 francs. Il devient ainsi membre à vie.

Les membres ayant racheté leurs cotisations pourront devenir membres fondateurs en versant une somme complémentaire de 300 francs. Il sera loisible de racheter les cotisations par deux versements annuels consécutifs de 100 francs.

La liste alphabétique des membres à vie est publiée en tête de chaque volume, immédiatement après la liste des membres fondateurs.

Les souscriptions des membres fondateurs peuvent être versées en une seule fois ou en deux versements de 250 francs chacun.

Les souscriptions sont reçues :

Au SECRÉTARIAT, à l'Hôtel des Sociétés savantes, 28, rue Serpente, à Paris.

IMPRIMERIE CHAIX, 20, RUE BERGÈRE, PARIS. — 3912-3-90.